Τετάρτη 3 Μαΐου 2017

## Διαγράμματα φάσης

Όπως γνωρίζουμε από την πλήρη μελέτη της κίνησης ενός υλικού σημείου (π.χ. σε μια διάσταση) χρειάζεται να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ και εν γένει είναι δύσκολο ή αδύνατο να λυθούν. Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της λύσης χωρίς να λύσαμε τη διαφορική εξίσωση. Για να το πετύχουμε αυτό θα γράψουμε την εξίσωση ως σύστημα εξισώσεων:

Θέτουμε $\psi = \dot{x}$ και άρα $\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \psi \\ \dot{\psi} = F(x, \psi) \end{cases}$

Το σύστημα παραμένει αυτόνομο διότι δεν περιέχεται η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Γενικά ένα αυτόνομο σύστημα είναι της μορφής $\begin{cases} \dot{x} = F(x, \psi) \\ \dot{\psi} = G(x, \psi) \end{cases}$

με τις συναρτήσεις F και G διαφορίσιμες σε κάποια περιοχή του $\mathbb{R}^2$.

Άμεσα μπορώ να βρω ένα set λύσεων με: $F = G = 0$.

Παρατήρηση Οι λύσεις για τις οποίες $\dot{x} = \dot{\psi} = 0$ δηλαδή για τις οποίες δεν υπάρχει κάποια δυναμική καλούνται στάσιμες ή σταθερές λύσεις.

**Ορισμός**: Ένα σημείο $(x^*, \psi^*)$ του συστήματος $\begin{cases} \dot{x} = F(x, \psi) \\ \dot{\psi} = G(x, \psi) \end{cases}$ για το οποίο $F(x^*, \psi^*) = G(x^*, \psi^*) = 0$ καλείται κρίσιμο σημείο και η αντίστοιχη λύση (αν ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες) καλείται λύση ισορροπίας με $\begin{cases} x(t) = x^* \\ \psi(t) = \psi^* \end{cases}$

Οι λύσεις $\begin{cases} x = x(t) \\ \psi = \psi(t) \end{cases}$ ορίζουν ένα σύστημα συντεταγμένων κ τους δυο άξονες $Ox$, $O\psi$.

$\longrightarrow$

το επίπεδο από με κάθετο άξονα τον Οψ, οριζόντιο άξονα τον Οx καλείται χώρος των φάσεων.

Εύρεση του χώρου των φάσεων.

$$\frac{d\psi}{dt} = G(x,\psi) \Rightarrow \frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = G \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} F = G \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\psi}{dx} = \frac{G(x,\psi)}{F(x,\psi)}}$$

Ο χώρος των φάσεων παράγεται από μια πρώτου βαθμού διαφορική εξίσωση. Σε φυσικές μονάδες ο κάθετος άξονας αντιστοιχεί στην ταχύτητα ενώ ο οριζόντιος στη θέση.

Παράδειγμα: Θεωρώ το σύστημα $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{\psi} = -k\psi \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

Τα κρίσιμα σημεία $\begin{cases} x = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$, $(0,0) = (x^*, \psi^*)$

Λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x(t) = x(0)\cdot e^{-t} = x_0 \cdot e^{-t} \Rightarrow e^{-t} = \frac{x}{x_0} \\ \psi(t) = \psi(0)\cdot e^{-kt} = \psi_0 \cdot e^{-kt} \end{cases}$$

Αν $x_0 = \psi_0 = 0$ τότε η λύση είναι το κρίσιμο σημείο $(0,0)$

Ζητάμε το χώρο των φάσεων για τη μη τετριμμένη λύση.

$$\psi(t) = \psi_0 \cdot e^{-kt} = \psi_0 (e^{-t})^k = \psi_0 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^k = b\cdot x^k$$

$$b = \frac{\psi_0}{x_0^k}$$

$\psi = b\cdot x^k$

Βάση της $\frac{d\psi}{dx} = \frac{G}{F} = \frac{-k\psi}{-x} = \frac{k\psi}{x}$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{k\psi}{x} \Rightarrow \frac{d\psi}{\psi} = k\cdot\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\psi = \ln x^k + c \Rightarrow$$

$$\psi = bx^k, \quad b = e^c$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

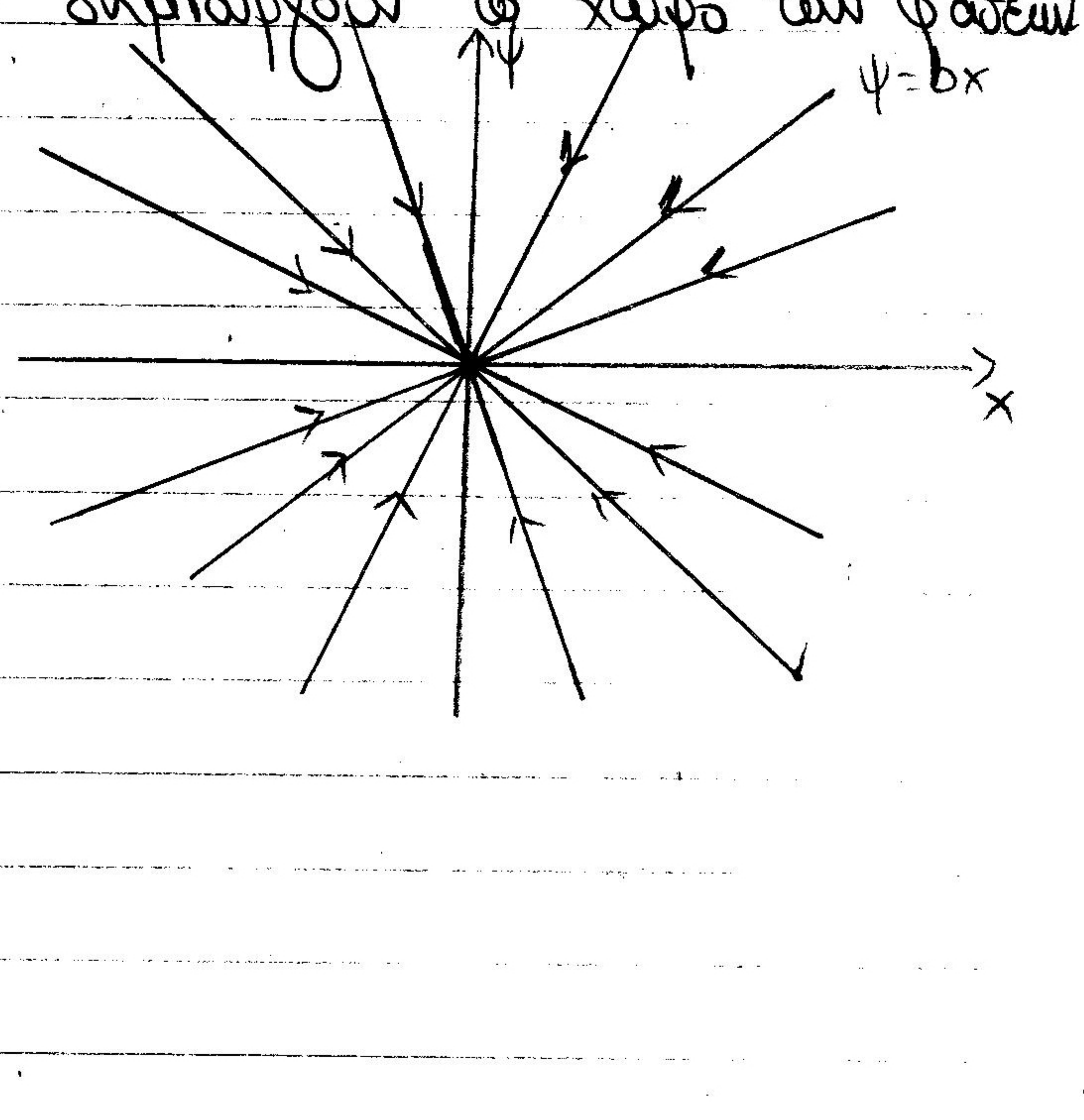
1) $\underline{\kappa > 0}$ : Παρατηρούμε ότι για $\underline{\kappa > 0}$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$$

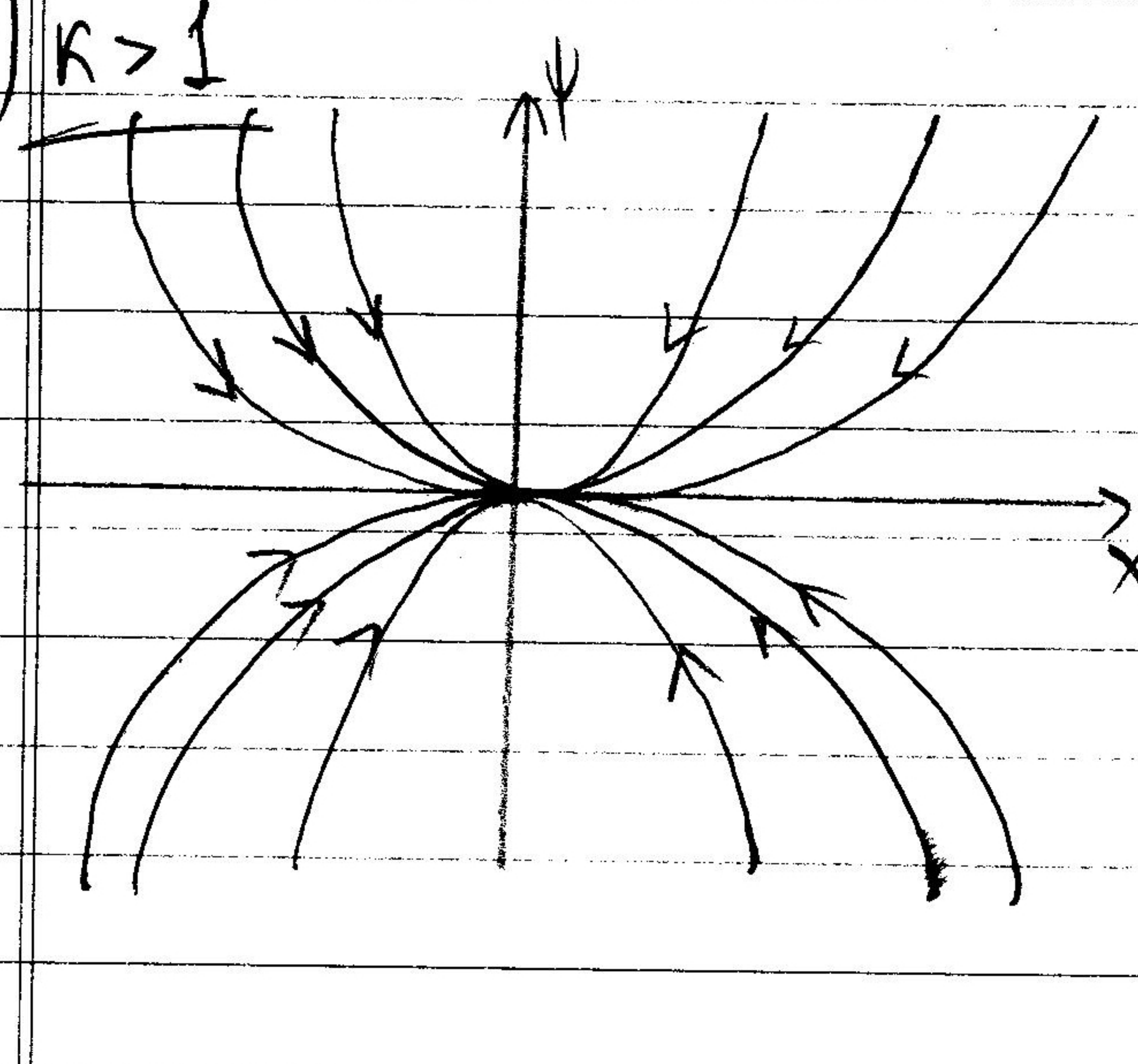
Δηλαδή η λύση του συστήματος τείνει ασυμπτωτικά στο κρίσιμο σημείο. Στην περίπτωση αυτή το κρίσιμο σημείο καλείται και σημείο συσσώρευσης.

Ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζεται το κρίσιμο σημείο εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς κ. Οι διάφορες καμπύλες που προκύπτουν δημιουργούν το χώρο των φάσεων

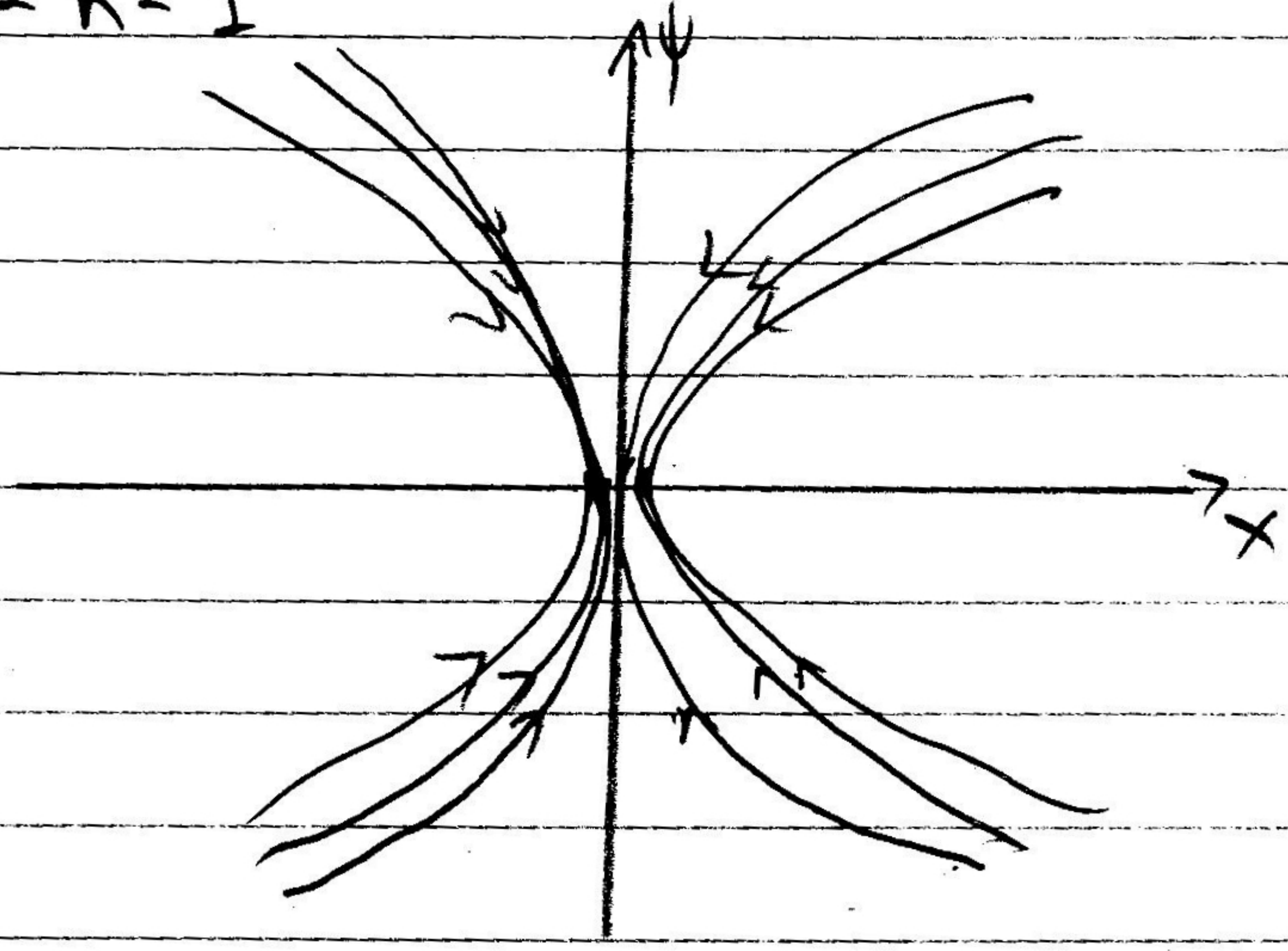
<u>Δηλαδή</u> $\kappa = 1$ $\psi = bx$




2) $\underline{\kappa > 1}$

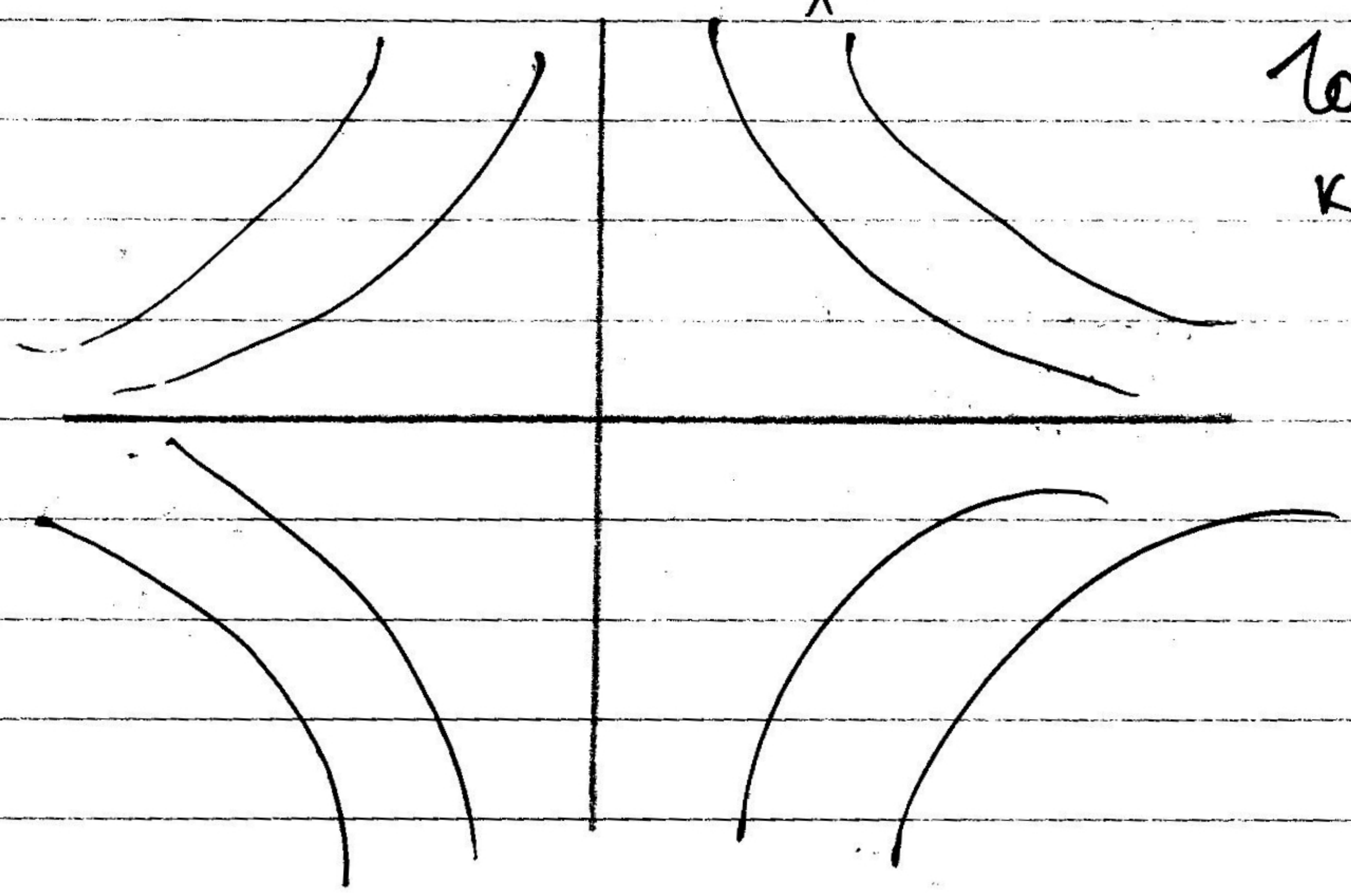


3) $0 < k < 1$




Για αυτή τη συμπεριφορά το σημείο $(0,0)$ (σημείο συσσώρευσης) καλείται κόμβος.
Αν οι φασματικές γραμμές έχουν φορά προς το σημείο αυτό το σημείο είναι σημείο συσσώρευσης. Αν έχουν φορά εκτός από αυτό καλείται πηγή (source).

4) $k < 0$ $\psi = b \cdot x^{-|k|} = \frac{b}{x^{|k|}}$



Το σημείο $(0,0)$ καλείται σαγματικό σημείο.

→

## Ο απλός αρμονικός ταλαντωτής

Θεωρούμε υλικό σημείο μάζας $m$, που ταλαντώνεται σε ελατήριο και ικανοποιεί το νόμο του Hooke.

$m\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$

$\omega^2 = k/m$

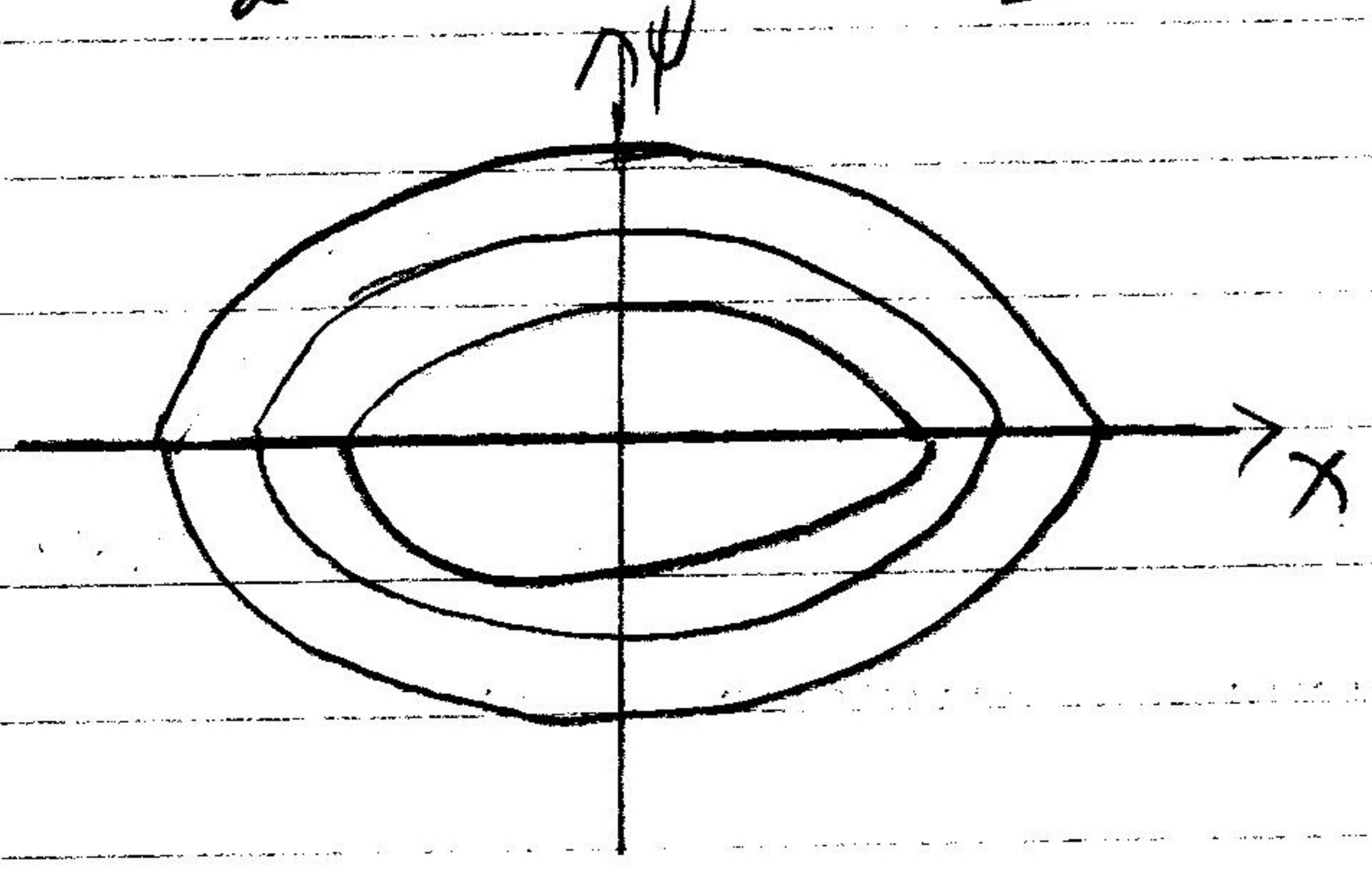
Γράφουμε την εξίσωση σε μορφή συστήματος

$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \psi \\ \dot{\psi} = -\omega^2 x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$F(x,\psi) = \psi, \quad G(x,\psi) = -\omega^2 x$

$\frac{d\psi}{dx} = \frac{G}{F} = \frac{-\omega^2 x}{\psi} \Rightarrow \psi \cdot d\psi = -\omega^2 x \, dx \Rightarrow$

$\psi^2/2 = \frac{-\omega^2}{2} \cdot x + c \Rightarrow \boxed{\psi^2 + \omega^2 x^2 = c}$




$\psi^2 + \omega^2 x^2 = c$

Η διαφορική εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $\underset{(\text{επί})}{\overset{\uparrow}{\times}} \dot{x}$

$\ddot{x} \cdot \dot{x} + \omega^2 x \cdot \dot{x} = 0 \Rightarrow$

$(\dot{x})^2/2 + \frac{\omega^2}{2} x^2 = c$

$T + V = C$ (Αρχή Διατήρησης της ενέργειας)

$\longrightarrow$

## Παράδειγμα:

Η εξίσωση $\ddot{x}+a\cdot\sin x=0$

$$\begin{cases}\dot{x}=\psi\\ \dot{\psi}=-a\sin x\end{cases} \Rightarrow \frac{d\psi}{dx}=\frac{-a\sin x}{\psi}$$

ή $\ddot{x}\dot{x}+a\sin x\cdot\dot{x}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(\dot{x})^2-a\cos x=c}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\psi^2-a\cos x=c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\psi^2=2(c+a\cos x)}$$

## Παρατηρήσεις:

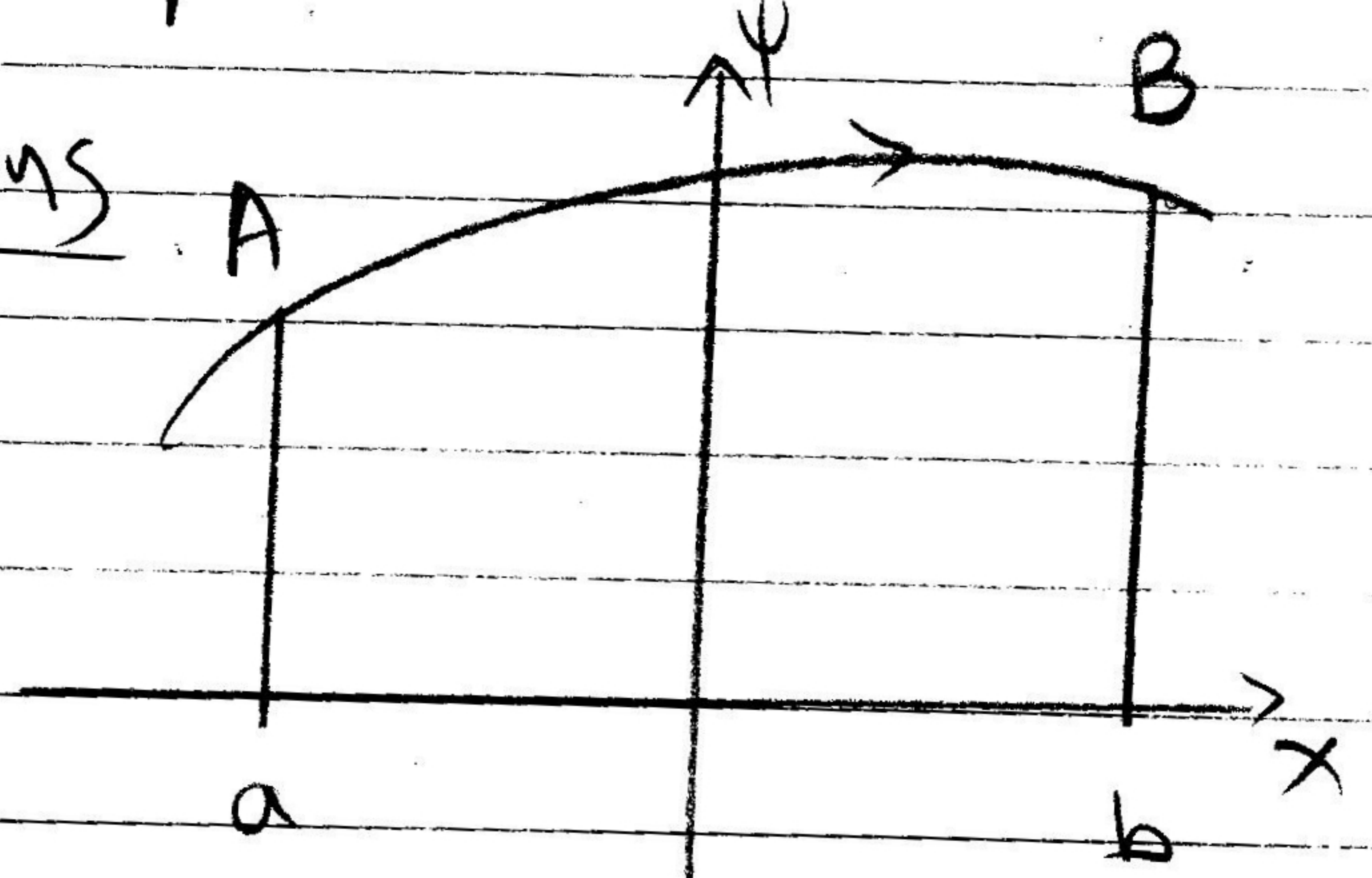
1) Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος βρίσκονται πάντα στον οριζόντιο άξονα και ικανοποιούν:

$$\begin{cases}\dot{x}=\psi=0\\ \dot{\psi}=-a\sin x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\psi=0\\ \sin x=0,\ x=n\pi\end{cases}$$

2) Κλειστές καμπύλες στα διαγράμματα φάσεως αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις δηλαδή μια αρχική κατάσταση επαναλαμβάνεται συνεχώς στο χρόνο.

3) Σημεία ισορροπίας που περιβάλλονται από κλειστές καμπύλες στο χώρο των φάσεων καλούνται ευσταθή.

## Χρόνος μετάβασης



Θέλουμε να μεταβούμε από το σημείο A στο B στο φασικό χώρο. Ο χρόνος που χρειαζόμαστε καλείται χρόνος μετάβασης και υπολογίζεται ως εξής

$$T = \int_c dt = \int_c \frac{\dot{x}}{\dot{x}}\, dt = \int_c \frac{\dot{x}\, dt}{\dot{x}} = \int_c \frac{dx}{\psi}$$

## Άσκηση

1) Στη περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$x(0) = x_0$

$\dot{x}(0) = v_0$

Να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματα του φασικού χώρου λύνοντας την εξίσωση.

2) Να επαναλάβετε τη μελέτη του φασικού χώρου για την εξίσωση $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$.

## Διατηρήσιμα Συστήματα

Έχουμε ήδη συνδέσει την εξίσωση του Newton με τη διατήρηση της ενέργειας. Χρειάζεται να απαντήσουμε επιπλέον 2 ερωτήματα:

α) Μπορώ να συνδέσω τη κίνηση ενός υλικού σημείου κ τη μελέτη της με τις αντίστοιχες ενέργειες;

β) Πως μέσω μόνο της δυναμικής ενέργειας μπορώ να μελετήσω τα σημεία ισορροπίας ενός συστήματος.

$\longrightarrow$

Γνωρίζουμε ότι: $\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E$ σταθερό.

θεωρώ πλέον $m = m(x)$

Παραγωγίζουμε $\quad \frac{1}{2}m'\cancel{\dot{x}}(\dot{x})^2 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}m\cancel{\dot{x}}\ddot{x} + V'\cdot\cancel{\dot{x}} = 0$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{2}m'(\dot{x})^2 + m\cdot\ddot{x} + V' = 0$$

Θέτω $\frac{du}{dx} = \sqrt{m(x)}$ ή $u = \int\sqrt{m(x)}\,dx$

και $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\dot{x} = \sqrt{m}\cdot\dot{x}$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\sqrt{m}\,\dot{x}) = \frac{d}{dt}\sqrt{m}\cdot\dot{x} + \sqrt{m}\cdot\ddot{x}$$

$$= \frac{d\sqrt{m}}{dx}(\dot{x})^2 + \sqrt{m}\,\ddot{x} = u''(\dot{x})^2 + u'\ddot{x}$$

$$\frac{1}{2}m'(\dot{x})^2 + m\ddot{x} + V' = 0$$

$$\ddot{u} = (\dot{x})^2\frac{m'}{2\sqrt{m}} + \sqrt{m}\cdot\ddot{x} \Longrightarrow \sqrt{m}\,\ddot{u} = \frac{1}{2}m'(\dot{x})^2 + m\ddot{x}$$

Δηλαδή $\boxed{\sqrt{m}\,\ddot{u} + V' = 0}$

$V = V(x) \quad \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \sqrt{m}\cdot\frac{dV}{du}$

$$\left\{ \ddot{u} + \frac{dV}{du} = 0 \text{ ή } \boxed{\ddot{u} = -\frac{d}{du}V(u)} \right.$$

Δηλαδή αντιστοιχεί πάλι σε μια εξίσωση τύπου Newton.

Σε κάθε περίπτωση η τελική μορφή που έχει ένα διατηρήσιμο σύστημα είναι $\ddot{x} = f(x)$ με $V(x) = -\int f(x)\,dx$ ή $f(x) = \frac{dV}{dx}$

→

Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται από τη λύση
$F(x) = -\frac{dV}{dx} = 0$.

Δηλαδή αντιστοιχούν στα μέγιστα κ ελάχιστα της δυναμικής ενέργειας.